

Μάθημα / 22/03/2018

NO
Date

Για την ενότητα ε βδομάδα μόνο:

• Τετάρτη 28/3 : 18:00 - 24:00 Αμφ 3

• Πέμπτη 29/3 : 18:00 - 20:00 Αμφ 3

Εάν έχουμε επίπεδο (π) με αναλογιστική εξίσωση:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ και } P_1(x_1, y_1, z_1), \text{ σημείο}$$

επὶ τοῦ επιπέδου, τότε:

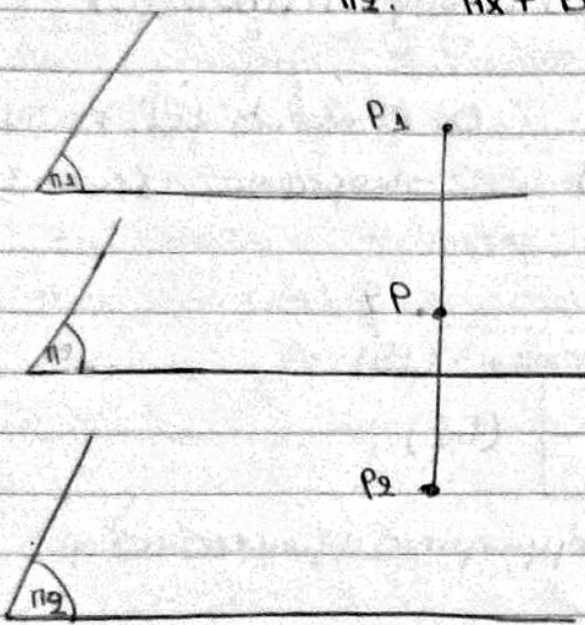
$$d(P_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Εφαρμογή

Θεωρούμε δύο παράλληλα επίπεδα:

$$\pi_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

$$\pi_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0, \text{ όπου } D_1 \neq D_2$$



Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση του μεσοπαράλληλου επιπέδου. Το επίπεδο που ψάχνουμε έχει εξίσωση:

$Ax + By + Cz + D = 0$. Αρκεί να προσδιορίσουμε το D . Για αυτό αρκεί να βρούμε ένα σημείο του επιπέδου. Είναι φανερό πως αν $P_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi_1$ και

$P_2(x_2, y_2, z_2) \in \pi_2$ τότε

$$P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) \in (\pi)$$

Επομένως, θα πρέπει:

$$0 = A \frac{x_1+x_2}{2} + B \frac{y_1+y_2}{2} + C \frac{z_1+z_2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (Ax_1 + By_1 + Cz_1) + \frac{1}{2} (Ax_2 + By_2 + Cz_2) + D$$

$$= -\frac{1}{2} D_1 - \frac{1}{2} D_2 + D \Rightarrow$$

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2}$$

Άρα, η εξίσωση μεσοπαράλληλων επιπέδων είναι:

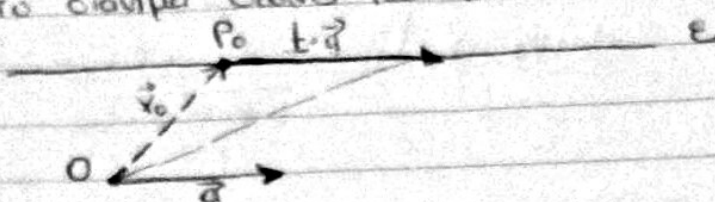
$$Ax + By + Cz + \frac{D_1 + D_2}{2} = 0$$

Ευθεία στον $\mathbb{R}^3$

Ορισμός: Έστω σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ του $\mathbb{R}^3$ και $\vec{a}$ ένα μη-μηδενικό διάνυσμα, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Η ευθεία που διέρχεται από το P_0 και είναι παράλληλη με το $\vec{a}$ ορίζουμε το ευθύ που περιγράφεται:

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_0 + t \cdot \vec{a}} \quad (E1)$$

όπου $\vec{x}_0$ το διάνυσμα θέσης του P_0 .



Η (E1) αναγράφεται διανυσματική εξίσωση της ευθείας.

Από την (E1) βρίσκουμε $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t a_1 \\ y = y_0 + t a_2 \\ z = z_0 + t a_3 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (E2)$$

Οι εξισώσεις (E2) λέγονται παραμετρικές εξισώσεις.

Με απαλοιφή των t από την (E2):

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}} \quad (E3)$$

Οι εξισώσεις (E3) λέγονται συμμετρικές εξισώσεις ως προς P_0 και $\vec{a}$.

Από το σύστημα (E3) $\Rightarrow$ μπορούμε να περιγράψουμε την (E) ως εξής:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \end{cases} \quad (E4)$$

Οι εξισώσεις (E4) λέγονται αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας.

Συνεπώς η ευθεία περιγράφεται από μία τις παρακάτω μορφές:

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_0 + t \cdot \vec{a}} \quad (E1)$$

$$x = x_0 + t \cdot a_1$$

$$y = y_0 + t \cdot a_2$$

$$z = z_0 + t \cdot a_3$$

(E2)

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3} \quad (E3)$$

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad (E4)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

ΠΡΟΤΑΣΗ (1)

Μια ευθεία (ε) στον $\mathbb{R}^3$ περιγράφεται ως τομή δύο επιπέδων

ΠΡΟΤΑΣΗ (2)

Ας θεωρήσουμε δύο επίπεδα.

$$\pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$\pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

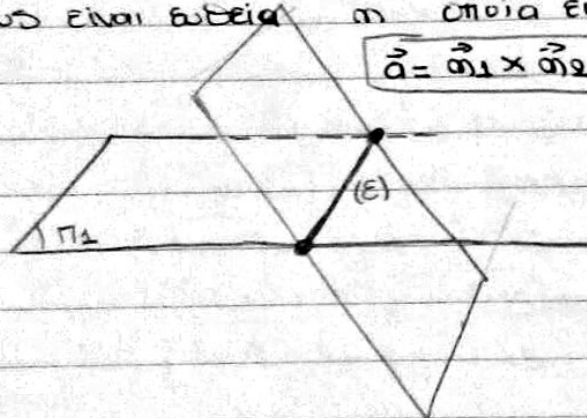
τα οποία τέμνονται και ℓ - δύο σημείων. Τότε η τομή τους είναι ευθεία η οποία είναι παράλληλη με το διάνυσμα:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

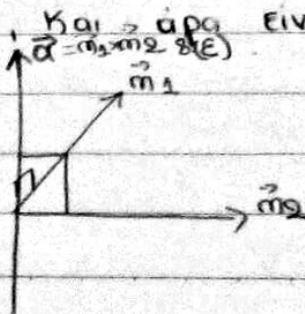
, όπου

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \quad \text{κάθετο στο } \pi_1$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \quad \text{κάθετο στο } \pi_2$$

ΠΡΟΔΕΙΞΗ

Το ότι το διάνυσμα $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ είναι παράλληλο προς την ευθεία προκύπτει από το γεγονός ότι η (ε) βρίσκεται και στα 2 επίπεδα. Και άρα είναι κάθετο και στο $\vec{n}_1$ και στο $\vec{n}_2$.



Παράδειγμα

Δίνεται η ευθεία:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

Θέλουμε να βρούμε τις συνιστώσες εξισώσεων αυτής.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα πηδών (E) διαφέρει είναι:

$$\vec{a} = \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (-5, -1, 7)$$

Άρα να βρούμε ένα σημείο της (E). Για $z=0$ έχουμε:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ένα σημείο της ευθείας είναι το $P_0(-2, 2, 0)$.

• Διανυσματική Εξίσωση

$$\vec{r} = (-2, 2, 0) + t(-5, -1, 7)$$

• Παραμετρικές

$$x = -2 - 5t$$

$$y = 2 - t$$

$$z = 0 + 7t$$

• Συμμετρικές

$$\frac{x+2}{-5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-0}{7}$$

(*)

Από (*):

$$\begin{cases} -x + 5y - 12 = 0 \\ 7y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

Όπως είδαμε υπάρχουν πολλά επίπεδα τα οποία περιέχουν μια ευθεία.

Ορισμός

Δίνεται ευθεία (ε):
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



Το σύνολο των επιπέδων που περιέχουν την (ε) λέγεται αξονική σέση των επιπέδων με αξονα την ευθεία (ε).

Θεώρημα

Δεσφω ευθεία:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Ένα επίπεδο (π) ανήκει στην αξονική σέση αν και μόνο αν έχει αναλυτική εξίσωση της μορφής:

$$(*) \quad \lambda_1 (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2 (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$.

Απόδειξη

Η ευθεία (ε) προφανώς περιέχει την (*).

Ας αποδείξουμε το αντίστροφο:

Θετω (π) ένα επίπεδο το οποίο περιέχει την (ε).

Εάν $P_1(x_1, y_1, z_1)$ είναι σημείο του (π), που δεν ανήκει στην (ε), τότε η εξίσωση:

$$- (A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (**)$$

παριστάνει επίπεδο, επαληθεύεται από την (ε) και από το P_1 .

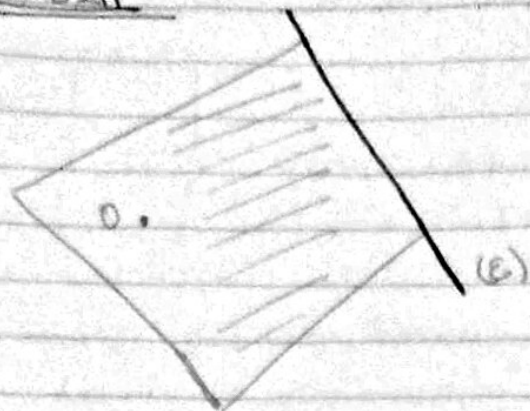
Τέτοιο επίπεδο είναι μοναδικό. Άρα η εξίσωση της (π) είναι η (**) και έχει την μορφή που θέλουμε.

Παράδειγμα

Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την ευθεία:

$$(ε): \begin{cases} 3x - 2y + 6z - 6 = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

, και διέρχεται από την αρχή των αξόνων

ΛΥΣΗ

Έστω Π το χρο επιπεδο, το οποίο περιέχει την (E) .

Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα

$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, με $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$

έτσι ώστε:

$$\lambda_1(3x - 2y + 6z - 6) + \lambda_2(x - y + z + 4) = 0$$

Θέλουμε να βρούμε λ_1, λ_2 έτσι ώστε Π να περνάει από την αρχή των αξόνων. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\lambda_1(3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 6) + \lambda_2(0 - 0 + 0 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow -6\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{2}{3}\lambda_2}$$

Αντικαθιστώντας:

$$\frac{2}{3}\lambda_2(3x - 2y + 6z - 6) + \lambda_2(x - y + z + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{3x - \frac{7}{3}y + 7z = 0}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

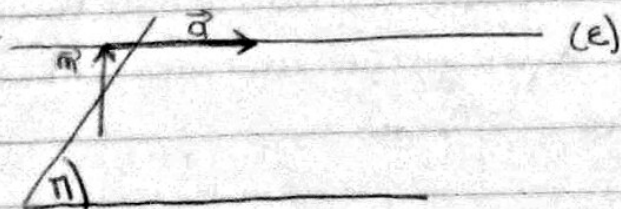
Έστω (E) μια ευθεία με διανυσματική εξίσωση:

$$(E): \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a},$$

και επιπεδο (Π) με εξίσωση $(\Pi): Ax + By + Cz + D = 0$

και κάθετο $\vec{n} = (A, B, C)$. Τότε:

(I) Εάν $\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = 0$, η (E) είναι παράλληλη με το (Π) .

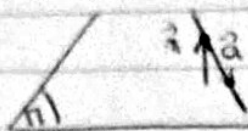


Εάν επιπρόσθετα ένα σημείο της (E) βρίσκεται στο $(\Pi) \Rightarrow$

$$\boxed{(E) \subseteq (\Pi)}$$

(ii) Εάν $\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle \neq 0 \Rightarrow m(E)$ και (η) τέμνεται σε ένα σημείο με συντεταγμένες:

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - \frac{\langle \vec{n}, \vec{x}_0 \rangle + \Delta}{\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle} \cdot \vec{a}$$



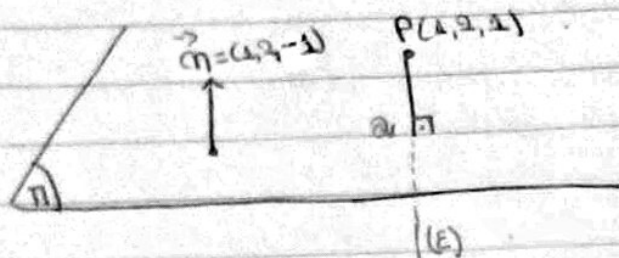
Π.χ

Να βρεθεί το σημείο τομής του επιπέδου:

(η): $x+2y-z=0$ και της καθ' ύψος προς

προς αυτό ευθείας (E) που διέρχεται από το σημείο $P(1,2,1)$

Λύση



Η ευθεία που ζητάμε είναι $m: \vec{x}_0 = (1,2,1) + t \cdot (1,2,-1)$

$$\Rightarrow x = 1+t$$

$$y = 2+2t$$

$$z = 1-t, \text{ όπου } t \in \mathbb{R}.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε για ποιο t $m(E)$ τέμνει το (η), πρέπει:

$$(1+t) + 2(2+2t) - (1-t) = 0 \Rightarrow t = -2/3$$

Άρα το σημείο τομής είναι:

$$Q(1/3, 2/3, 5/3)$$

Συμπέρασμα

Η απόσταση $d(P, \pi) = \|\vec{PQ}\|$